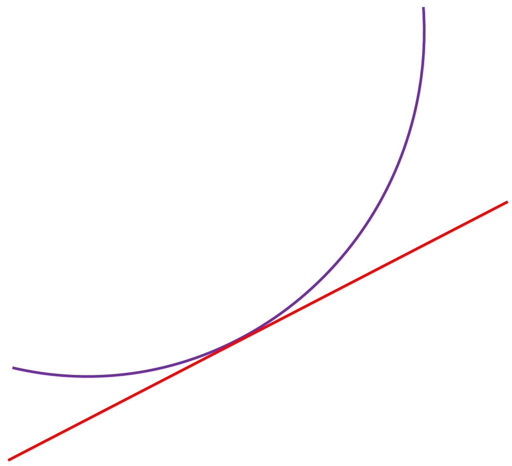
מתמטיקה

ב

לכלכלנים



גיא סלומון

<u>סטודנטים יקרים</u>

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את
הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות
הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגוּל בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר http://www.gool.co.il **הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.**

לצפיה בשיעור חינם בעמוד הקורס: <u>חדוא 1</u>

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סולומון

תוכן

פרק 1 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאבליות 4
פתרונות 6
פרק 2 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה) 7
פתרונות 8
פרק 3 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג') 9
פונקציות של שני משתנים 9
פתרונות 11
פרק 4 - קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה 12
פתרונות 12
פרק 5 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי) 13
פרק 6 - האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים) 14
פרק 7 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים) 15
פרק 8 - האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה) 16
פרק 9 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות) 17
פרק 10 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת) 18
פרק 11 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות 27
פרק 12 - מטריצות 34
פרק 13 - דטרמיננטות 39
פרק 14 - פונקציות הומוגניות, משפט אוילר 44
פרק 15 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים 46
עקומות שוות ערך 46
נגזרות חלקיות 47
פרק 16 – וקטורים: 48
וקטורים גיאומטריים: 48
פרק 17 - כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים 58
פתרונות 59
פרק 18 - נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל השלם 59
נוסחת טיילור 60
הדיפרנציאל השלם 60
פתרונות 61
פרק 19 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט 62
פתרונות 63

פרק 1 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאבליות

(1) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ $\left(\text{only } f_x\right)$

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

6) $f(x,y)=\sin\left(xy\right)$

7) $f(x,y)=\arctan(2x+3y)$

8) $f(r,\theta)=r\cos\theta$

9) $f(x,y,z)=xy^2z^3$

10) $f(u,v,t)=e^{uv}\sin ut$

(2) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y)=\sin\left(10x+4y\right)$

4) $f(x,y,z)=xyz$

(3) (1 חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

2) האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

3) האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה ?

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(4) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה משאלה (3) בנקודה $(0,0)$

(5) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$:

1) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2) $$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(6) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה בתחום הגדרתה

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

הערת סימון:

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2\\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22}\\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21}\end{array}$$

פתרונות

(1)

(1 $f_x=12x^2-6xy^2+2$ $\quad$ $f_y=-6x^2y+3$

(2 $f_x=5x^4\ln y$ $\quad$ $f_y=\dfrac{x^5}{y}$

(3 $f_x=2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$

(4 $f_x=6x^2+6xy+2y^3$ $\quad$ $f_y=6xy^2+12y^3+3x^2$

(5 $f_x=\dfrac{x^2+2xy^2+3y}{\left(x+y^2\right)^2}$ $\quad$ $f_y=\dfrac{-3x+3y^2-2x^2y}{\left(x+y^2\right)^2}$

(6 $f_x=\cos(xy)\cdot y$ $\quad$ $f_y=\cos(xy)\cdot x$

(7 $f_x=\dfrac{2}{1+(2x+3y)^2}$ $\quad$ $f_y=\dfrac{3}{1+(2x+3y)^2}$

(8 $f_r=\cos\theta$ $\quad$ $f_\theta=-r\sin\theta$

(9 $f_x=y^2z^3$ $\quad$ $f_y=2xyz^3$ $\quad$ $f_z=3xy^2z^2$

(10 $f_u=e^{uv}\left[v\sin ut+t\cos ut\right]$ $\quad$ $f_v=u\cdot e^{uv}\cdot\sin ut$ $\quad$ $f_t=u\cdot e^{uv}\cdot\cos ut$

(2)

(1 $f_x=8x-2xy^2+4$ $\quad$ $f_{xx}=8-2y^2$

$f_y=-2x^2y+10$ $\quad$ $f_{yy}=-2x^2$

$f_{xy}=-4xy$ $\quad$ $f_{yx}=-4xy$

(2 $f_x=4x^3\ln y$ $\quad$ $f_{xx}=12x^2\ln y$

$f_y=\dfrac{x^4}{y}$ $\quad$ $f_{yy}=-\dfrac{x^4}{y^2}$

$f_{xy}=\dfrac{4x^3}{y}$ $\quad$ $f_{yx}=\dfrac{4x^3}{y}$

(3 $f_x=10\cos\left(10x+4y\right)$ $\quad$ $f_{xx}=-100\sin\left(10x+4y\right)$

$f_y=4\cos\left(10x+4y\right)$ $\quad$ $f_{yy}=-16\sin\left(10x+4y\right)$

$f_{xy}=-40\sin\left(10x+4y\right)$ $\quad$ $f_{yx}=-40\sin\left(10x+4y\right)$

(4 $f_x=yz$ $\quad$ $f_{xx}=0$ $\quad$ $f_{xy}=z$ $\quad$ $f_{xz}=y$

$f_y=xz$ $\quad$ $f_{yx}=z$ $\quad$ $f_{yy}=0$ $\quad$ $f_{yz}=x$

$f_z=xy$ $\quad$ $f_{zx}=y$ $\quad$ $f_{zy}=x$ $\quad$ $f_{zz}=0$

(3) (1 הנגזרות החלקיות בנקודה $(0,0)$ שוות אפס.

(2 הפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

(3 פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(4) לא דיפרנציאבילית.

(5) (1 לא דיפרנציאבילית (2 דיפרנציאבילית.

(6) דיפרנציאבילית.

פרק 2 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוכף.

(1) $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

(2) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

(3) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

(4) $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

(5) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

(6) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

(7) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

(8) $f(x,y)=e^x\cos y$

(9) נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$.

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$

וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.

עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8$.

מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1=116-30P_1+20P_2$$
$$Q_2=144+16P_1-24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2, על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות

(1) (‎-0.5,1) אוכף ; ‎(1.5,-3) מינימום.

(2) (1, 2) מינימום ; ‎(-1,-2) מקסימום ; ‎(-1, 2) , ‎(1,-2) אוכף.

(3) (0,0) אוכף ; (1,1) מינימום.

(4) (‎-1, 1) , ‎(-1, -1) מינימום ; ‎(1, 0) מקסימום ; ‎(-1, 0) , (1,1) , ‎(1, -1) אוכף.

(5) (0, 2) מקסימום.

(6) (4, 4) מקסימום.

(7) (‎-0.5, 4) מקסימום.

(8) אין נקודות קריטיות.

(9) $z=4$, $z=3$.

(10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .

(11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר (1/3,4/3,10/3) .

(12) $P_2=12\$$, $P_1=10\$$, רווח מקסימלי 288$.

פרק 3 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')

פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון :

(1) $f(x,y)=x^2+y^2 \;\; ; \;\; 2x^2+3xy=1-2y^2$

(2) $f(x,y)=x^2-y^2 \;\; ; \;\; x^2+y^2=1$

(3) $f(x,y)=4x+6y \;\; ; \;\; x^2+y^2=13$

(4) $f(x,y)=x^2y \;\; ; \;\; x^2+2y^2=6$

(5) נתונה בעיית הקיצון $Max\{xy\} \quad s.t. \quad x+3y=12$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעייה.

(6) נתונה בעיית הקיצון $Max\{2x+y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=9$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעייה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$, מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$ מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x-6y+4=0$ לפרבולה

$x^2+2xy+y^2+4y=0$.

רמז : מרחק הנקודה (x_0,y_0) מהישר $ax+by+c=0$ הוא $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(10) מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x,y) נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק x ק״ג מלפפונים ו- y ק״ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x,y) נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.

מחיר ק״ג מלפפונים 1 ש״ח. מחיר ק״ג עגבניות 3 ש״ח.

לדני תקציב של 12 ש״ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2+y^2=13$.

לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.

דני מחפש את הסל (אננס,מנגו) = (x,y) , על עקומת התמורה , המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעייה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K=2,\ P_L=1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*,L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

פתרונות

(1) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $Max\left(\pm1,\mp1\right)$

(2) $\min\left(\pm1,0\right)$ $Max\left(0,\pm1\right)$

(3) $\min\left(-2,-3\right)$ $Max\left(2,3\right)$

(4) $\min\left(\pm2,1\right)$ $Max\left(\pm2,1\right)$

(5) $Max\left(6,2\right)$

(6) $Max\left(9,36\right)$

(7) $\left(6,2\right)$

(8) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $Max\left(\pm1,\mp1\right)$

(9) $7/\sqrt{45}$

(10) $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

(11) $Max\left(6,2\right)$

(12) $Max\left(2,3\right)$

(13) $\sqrt{K}+\sqrt{L}=100$; $\min\left\{2K+L\right\}$

פרק 4 - קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה

(1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$f(x,y)=3xy-6x-3y+7$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת

משולש שקודקודיו הם: $(0,5),(3,0),(0,0)$.

(2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת

ריבוע שקודקודיו הם $(2,0),(2,2),(0,2),(0,0)$.

(3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$f(x,y)=x^2+2y^2-x$ בתחום R, כאשר R הוא העיגול $x^2+y^2\le 4$.

(4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור,

$R=\{(x,y)\,|\,x+y\ge -3\,,\,x\le 0,y\le 0\}$.

(5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור,

$R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\,3x\ge -y\}$.

פתרונות

(1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט 11-.

(2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט 1-.

(3) מקסימום מוחלט $33/4$. מינימום מוחלט $-1/4$.

(4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט 1-.

(5) מקסימום מוחלט $1+6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1-6\sqrt{10}$.

פרק 5 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי)

חשב את האינטגרלים הבאים:

1) $\int 4dx$
2) $\int x^4 dx$
3) $\int \frac{1}{x^2}dx$
4) $\int \sqrt{x}dx$
5) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$
6) $\int 4x^{10}dx$
7) $\int (2x^2-x+1)dx$
8) $\int (\frac{3}{x^4}+2\sqrt[3]{x})dx$
9) $\int (x^2+1)^2 dx$
10) $\int (x^2+1)(x+2)dx$
11) $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2}dx$
12) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$
13) $\int (4x+1)^{10}dx$
14) $\int (x^2-2x+1)^{10}dx$
15) $\int \frac{4}{(x-2)^5}dx$
16) $\int \sqrt[3]{4x-10}dx$
17) $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}}dx$
18) $\int \frac{x}{(x-1)^4}dx$
19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$
20) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$
21) $\int \frac{1}{4x}dx$
22) $\int \frac{1+x+x^2}{x}dx$
23) $\int (1+\frac{1}{x})^2 dx$
24) $\int \frac{1}{4x-1}dx$
25) $\int \frac{x+3}{x+2}dx$
26) $\int \frac{4x+1}{x+2}dx$
27) $\int (e^{4x}+e^{-x})dx$
28) $\int \left(e^{x+1}\right)^2 dx$
29) $\int \frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$
30) $\int \left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$
31) $\int \frac{1}{1+4x^2}dx$
32) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$
33) $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$
34) $\int \cos 4x dx$
35) $\int \sin\frac{x}{2}dx$
36) $\int 2\sin 4x+\cos x dx$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק6 - האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים)

חשב את האינטגרלים הבאים :

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ 2) $\int \cot x dx$ 3) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

4) $\int \tan x dx$ 5) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ 6) $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

7) $\int e^{x^2}2xdx$ 8) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$ 9) $\int e^{-2x^2}xdx$

10) $\int \cos(2x^2+1)\cdot 4xdx$ 11) $\int \cos(\sin x)\cdot \cos xdx$ 12) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

13) $\int \cos(10x^4+1)x^3dx$ 14) $\int \sin(x^2+1)xdx$ 15) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ 17) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ 18) $\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x}dx$

19) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ 20) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$ 21) $\int \sqrt{x^2+1}\cdot 2xdx$

22) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^2dx$ 23) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$

* הערה : את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.
* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 7 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

1) $\int xe^x dx$
2) $\int x^4 \ln x dx$
3) $\int x \sin x dx$
4) $\int (x^2+2x+3)\ln x dx$
4) $\int x \cos 2x dx$
5) $\int x^2 \sin 4x dx$
6) $\int x^2 e^{-4x} dx$
7) $\int \ln x dx$
8) $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$
9) $\int \arctan x$
10) $\int \arcsin x$
11) $\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$
12) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$
13) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
14) $\int x \arctan x$
15) $\int x^2 \ln(x^2+1) dx$
16) $\int \ln^2 x dx$
17) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$
18) $\int e^x \cos x dx$
19) $\int e^{2x} \sin 4x dx$
20) $\int \sqrt{1-x^2} dx$
21) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$
22) $\int x \tan^2 x dx$
$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

(2) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int x^4 e^x dx$.

(3) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(4) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(5) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 8 - האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים (**הצבות רגילות**):

1) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

7) $\int e^{x^2}x^3 dx$

8) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx$

10) $\int \cos(x^2+1)\cdot 2x^3 dx$

11) $\int x^3(3x^2-1)^{14}dx$

12) $\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x}dx$

13) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

14) $\int \ln^3 x dx$

15) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2}$

16) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{dx}{x\cdot \ln x\cdot \ln(\ln x)}$

19) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

20) $\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$

22) $\int \cos(\ln x)dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$

24) $\int x^5\cdot \sqrt[3]{x^3+1}dx$

<u>הערה:</u> בחלק מהתרגילים, לאחר ההצבה, תידרש לאינטגרציה בחלקים.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 9 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

1) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2}dx$

2) $\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

4) $\int \frac{2-x}{x^2+5x}dx$

4) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$

5) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx$

6) $\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}dx$

7) $\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36}dx$

8) $\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)}dx$

9) $\int \frac{5-x}{x^3+x^2}dx$

10) $\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x}dx$

11) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)}$

12) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$

13) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

14) $\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

15) $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx$

16) $\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

17) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$

18) $\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2}dx$

19) $\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1}dx$

20) $\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4}dx$

21) $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1}dx$

22) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2}dx$

23) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}dx$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

3) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}dx$

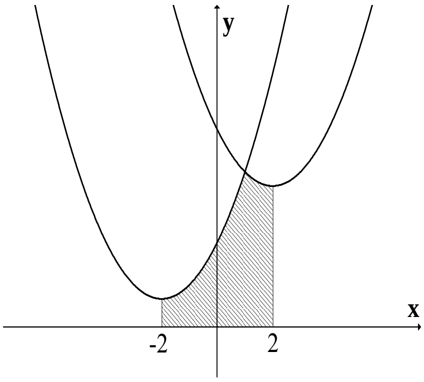
5) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

6) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 10 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)

חישוב שטחים



(1) נתונות שתי פונקציות :

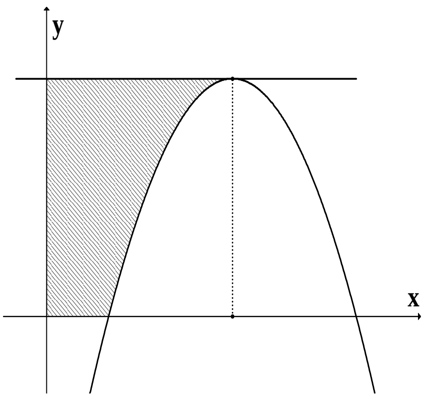
$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$
$$g(x) = x^2 - 4x + 14$$

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים

x = -2 ו- x = 2 (השטח המקווקו בציור).



(2) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 5$ (ראה ציור).

א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של

הפונקציה.

ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק

בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי

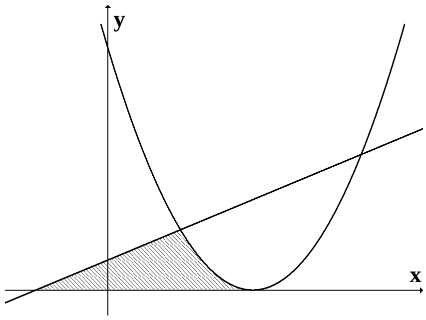
גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).

(3) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$ ונתון הישר

$y=0.5x+0.5$ (ראה ציור). מצא את השטח

המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x

(השטח המקווקו בציור).

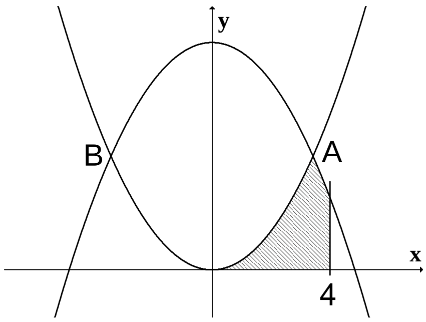


(4) נתונות הפונקציות :

$$f(x)=x^2$$
$$g(x)=-x^2+18$$

הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו-
B

(ראה ציור).



א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות A ו- B.

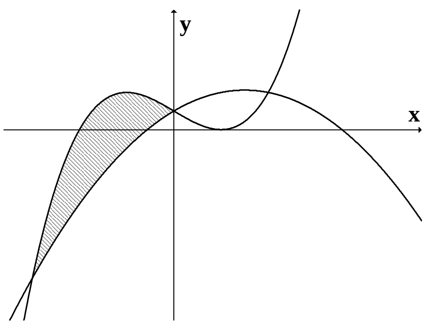
ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על
ידי

הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה- x
ועל

ידי הישר x = 4 .

(5) נתונות שתי פונקציות :

$y=-x^2+3x+2$
$y=x^3-3x+2$



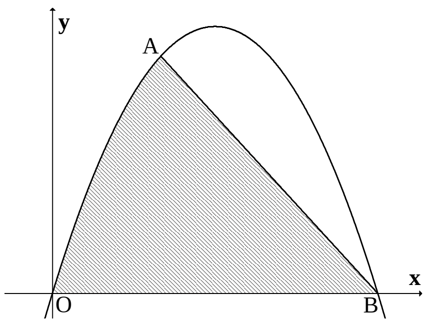
א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין

הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, השטח המקווקו בציור.

(6) נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+ax$.



הפונקציה עוברת דרך הנקודה $A(2,8)$ (ראה ציור).

א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. הפונקציה חותכת את ציר x בנקודה O(0,0)

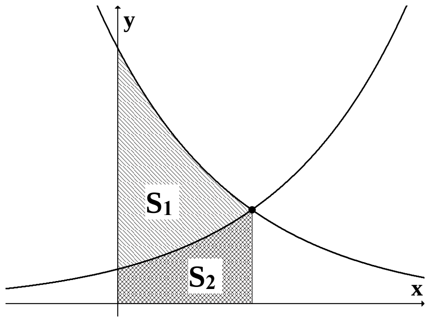
ובנקודה B . מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי המיתר AB ועל ידי ציר

ה- x .

(7) בציור שלפניך נתונות שתי הפונקציות :



$$f(x)=e^{-x+2}$$
$$g(x)=e^{x}$$

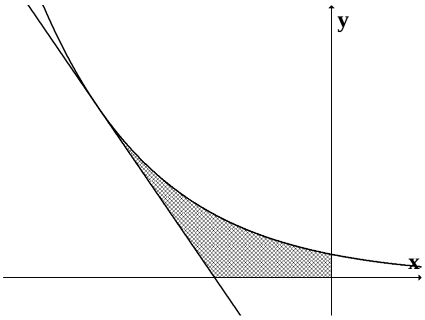
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר

y .

ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפונקציות.

ג. חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ (ראה ציור).

(8) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{-2x}$.



העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה

$x=-1$ (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

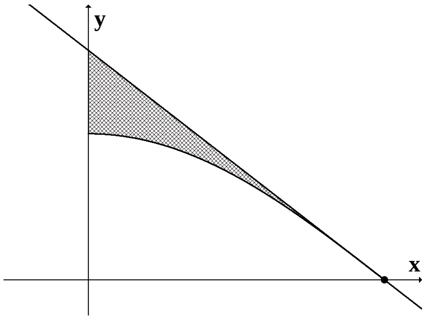
ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי הצירים (השטח

המקווקו בציור).

(9) נתונה הפונקציה $y=\cos 2x$ בתחום $0\le x\le 4$

(ראה ציור).



ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$.

א. מצא את משוואת המשיק .

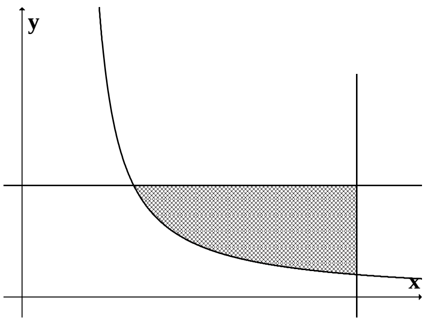
ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(10) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

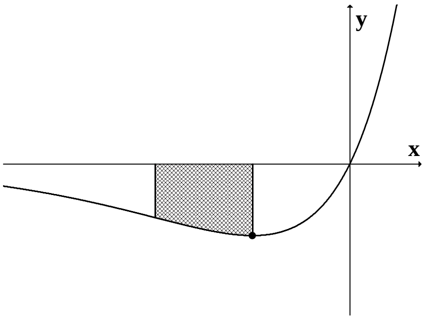
$y=\frac{1}{2x-1}$ ועל ידי הישרים $x=3$ ו- $y=1$

(השטח המקווקו בציור).



(11) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x}-e^{x}$.

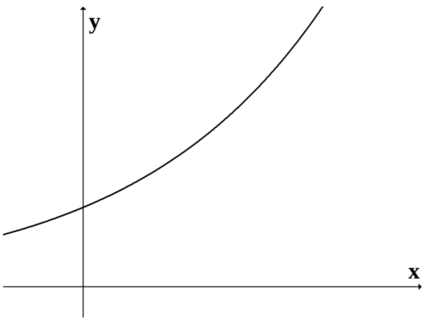
לפונקציה יש מינימום כמתואר בציור.



א. מצא את שיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה העבירו אנך לציר ה- x . נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך ועל ידי הישר x=a , שווה ל- $3e^{2a}-e^{a}$, כאשר $a<\ln 0.5$. מצא את הערך של a .

(12) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x+1}{2}}$ (ראה ציור).



שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A, הוא $\frac{e^{2}}{2}$.

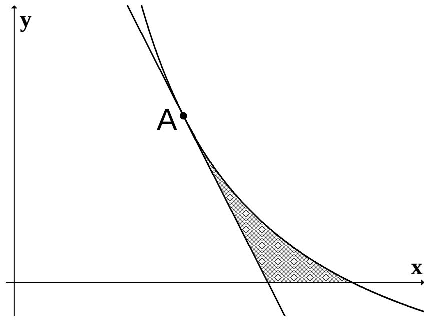
א. מצא את שיעורי הנקודה A .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(13)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{8}{x}-2$ בתחום $x>0$.



מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

$A(2,2)$ (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב.חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

(14) נתונות הפונקציות :

$$f(x)=\sin x \;\; ; \;\; 0\le x\le \pi$$
$$g(x)=\cos 2x \;\; ; \;\; 0\le x\le \pi$$

א. תאר במערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות.

ב. קווקו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות וחשב את גודלו.

(15)

נתונה הפונקציה $f(x)=tg^2x$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x\le 0$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\frac{\pi}{4}$.

ב. הראה כי $\int tg^2xdx=tgx-x+c$ ומצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x .

(16) דרך הנקודה $A(8,0)$ העבירו משיקים לפרבולה $y = x^2 - 10x + 25$.

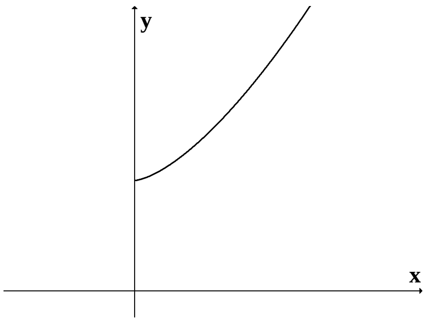
א. מצא את משוואות המשיקים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני המשיקים והפרבולה.

(17)

נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + 4$ בתחום $x \ge 0$.

(ראה ציור)



א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה (0,0) ומשיק לגרף הפונקציה הנתונה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה הנתונה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(18) א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \cos^3 x$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- x ועל ידי גרף הפונקציה $y = \cos^2 x \cdot \sin x$ בתחום $\frac{1}{2}\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$.

* לסטודנטים במקצועות ריאליים, ענו על סעיף ב ללא סעיף א.

(19) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

(20) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

(21) חשב את האינטגרלים הבאים : א. $\int_0^a \sqrt{x^2-a^2}\,dx$. ב. $\int_{-a}^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy$.

חישוב אורך עקום (קשת)

(22) חשב את אורך העקום הנתון בסעיפים הבאים :

1) $y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}\ \left(1\le x\le 2\right)$

2) $y=x^{2/3}\ \left(1\le x\le 8\right)$

3) $y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}\ \left(1\le x\le 2\right)$

4) $y=\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\ \left(0\le x\le 3\right)$

5) $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)\ \left(0\le x\le 3\right)$

6) $x^{2/3}+y^{2/3}=4\ \left(1\le x\le 8\right)$

7) $x=3y^{3/2}-1\ \left(0\le y\le 4\right)$

8) $y=\ln x\ \left(1\le x\le 2\right)$

9) $y=x^2\ \left(1\le x\le 2\right)$

פרק 11 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות ליניאריות

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

1) $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} 2x+y=3 \\ x-y=0 \end{matrix}$ 4) $\begin{matrix} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{matrix}$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{matrix}$ 4) $\begin{matrix} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{matrix}$

(3) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$

$R_3 \to R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2 + R_1$

$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3 - 3R_2$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 3R_3, R_2 \to R_2 + 3R_3$

$R_1 \to 5R_1 - 8R_2$

(4) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין:

1) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(5) א. **הסבר והדגם** את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.

ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

*9) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$

F=□ , F=□

* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה □ ופעם מעל השדה □ .

(6) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

1) $\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 5x-4y&=-3 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} 4x+8y&=20 \\ 3x+6y&=14 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} 8x-4y&=10 \\ -6x+3y&=1 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5 \\ 10x_1-6x_2-2x_3&=32 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} x+2y+3z&=-11 \\ 2x+3y-z&=-5 \\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ 4x+6y+16z&=8 \\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} x+3y&=2 \\ 2x+y&=-1 \\ x-y&=-2 \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} 4x-7y&=0 \\ 8x-14y&=2 \\ -16x+28y&=4 \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ -9x+6y&=-3 \\ 6x-4y&=2 \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} x+2y-3z+2t&=2 \\ 2x+5y-8z+6t&=5 \\ 6x+8y-10z+4t&=8 \end{aligned}$

11) $\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$

12) $\begin{aligned} x+2y+2z&=2 \\ 3x-2y-z&=5 \\ 2x-5y+3z&=-4 \\ 2x+8y+12z&=0 \end{aligned}$

(7) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

(1
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

(2
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

(3
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

(4
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

(5
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

(6
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

(8) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

(1
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

(2
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

(3
$$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

(9) מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות

(1
$$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

(2
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

(3
$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$

(10) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} x+az&=1\\ y+2z&=2\\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצא תנאי עבור a,b,c,d כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b,c,d כך שלכל a למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(11) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס מעל **השדה** $\mathbf{F}$.

(1
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=1\\ 2x_1+4x_2+4x_3&=2\\ 3x_1+x_3&=0 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{F}=\square_5}$

(2
$$\begin{aligned} z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i\\ iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i\\ (-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{F}=\square\ ,\ \mathbf{F}=\square}$

(12) נתונה המערכת:
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$$

א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת: 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

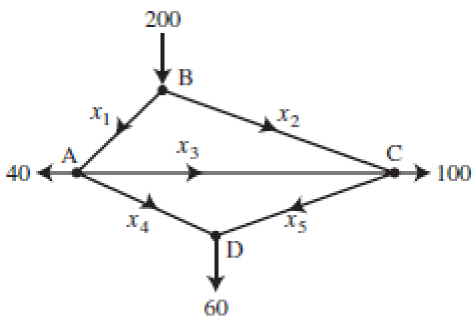
ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.

ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.

ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$. האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.

ח. מצא לאיזה ערך של k, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

(13) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.



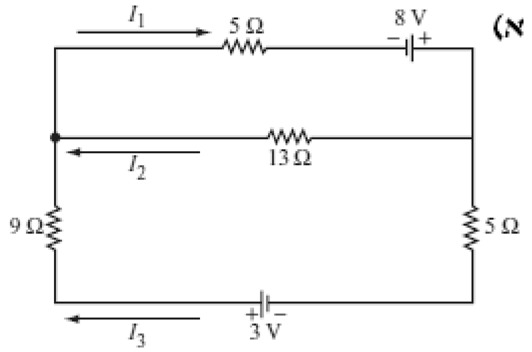
א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.

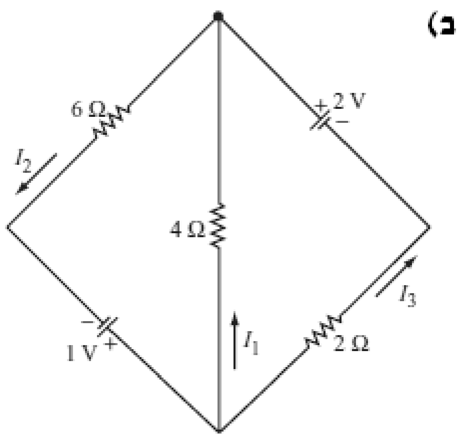
ג. מהו הערך המינימלי של x_1 אם ידוע ש- $x_4=0$.

(14) מצא את הזרמים במעגלים החשמליים הבאים (חוקי קירקהוף וחוק אוהם):

א)



ב)



*** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות ליניאריות.**

<u>תשובות:</u>

(1) 1) ו- 3) שקולות ו- 2) ו- 4) שקולות.

(2) 1) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

(3) 1) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

(4) 1) $R_1 \to 2R_1 + R_2$ 2) $R_2 \to R_2 - 4R_1$ 2) $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

(5) **ב.**

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(7
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ו-
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(8
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(9
$$\underset{F=\square}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} , \underset{F=\square}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(6)

1) $(x,y)=(1,2)$ 2) $(x,y)=(5-2t,t)$

3) ϕ 4) ϕ

5) $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$ 6) $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

7) $(x,y)=(-1,1)$ 8) ϕ

9) $(x,y)=(\frac{1+2t}{3},t)$ 10) $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

11) ϕ 12) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

(7) 1) א. $k\neq 1,\ k\neq -2$ ב. $k=1$ ג. $k=-2$ 2) א. $k\neq 1,\ k\neq -2$ ב. $k=-2$ ג. $k=1$

3) א. $k\neq -1,\ k\neq \frac{4}{7}$ ב. $k=\frac{4}{7}$ ג. $k=-1$ 4) א. $k\neq 1,\ k\neq -0.4$ ב. $k=1,\ k=-0.4$

5) א. $k\neq \pm 1,\ k\neq -2$ ב. $k=\pm 1, k=-2$.

6) א. $k\neq -1,\ k\neq -3,\ k\neq 2$ ג. $k=-1,\ k=-3,\ k=2$.

(8) 1) א. $k=-1$ ב. $k\neq \pm 1$ ג. $k=1$ 2) ב. $k=3$ ג. $k\neq 3$ 3) א. $k\neq 1$ ב. $k=1$

(9)

1) א. $a\neq 2$ ב. $a=2,\ b\neq -3$ ג. $a=2, b=-3$.

2) ב. $b \neq 2.5$ או $a \neq -6$ ג. $a=-6,\ b=2.5$.

3) ב. $a=2,\ b\neq 2$ ג. $a=2,\ b=2$ או $a\neq 2$.

(10) א. $ab+2c\neq d$ ב. $b=0,\ c=1.5,\ d=3$

(11)

1) $(x_1,x_2,x_3)=(0,3,0)$ 2) $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\square}{=}((-1+i)t+1+i,\ 3,\ t)$, $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\square}{=}(2,3,-1)$

(12) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$

ג. 1. $k\neq -1$, $k\neq 2$. 2. $k=-1$ 3. $k=2$

ד. $(x,y,z)=(1+0.2t,\ 0.8t,\ t)$

ה. $k=\pm 2$ ו. $k=-2$ ז. $k=2$, לא. ח. $k=-2$

(13) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1=100+x_3-x_5$, $x_2=100-x_3+x_5$, $x_4=60-x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1=40+x_3$, $x_2=160-x_3$, $x_4=0$, $x_5=60$.

ג. 40 .

(14) א. $I_1=\frac{255}{317},\ I_2=\frac{97}{317},\ I_3=\frac{158}{317}$. ב. $I_1=-\frac{5}{22},\ I_2=\frac{7}{22},\ I_3=\frac{6}{11}$

פרק 12 - מטריצות

(1) נתונות מטריצות: $A_{4\times6}$, $B_{4\times6}$, $C_{6\times2}$, $D_{4\times2}$, $E_{6\times4}$.
קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר המטריצה.

1) $A+B$ 2) AB 3) $AC-D$ 4) $AE-B$ 5) $B+AB$
6) $E(B+A)$ 7) $(E+A^T)D$ 8) E^TB 9) $E(AC)$ 10) $E(B-A)$

(2) מצא את x,y,z, אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

(3) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

1) $E+D$ 2) $E-D+I_3$ 3) $5C$ 4) $2D+4EI_3$ 5) $2tr\left(D^2-2E\right)$
6) $4C^T+A$ 7) $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$ 8) I_2BC 9) $tr\left(C^TC\right)$ 10) $DABC$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A, $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$ המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$.

1)
$$\begin{aligned} 2x+y-z&=3 \\ x+2y-4z&=5 \\ 6x+4y+z&=2 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z+t&=1 \\ 4x+y+2z&=4 \\ y+z+t&=1 \\ x-4z-2y&=10 \end{aligned}$$

(5) נתון:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}\quad \underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\quad \underline{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות ליניאריות:

1) $A\underline{x}=\underline{b}$ 2) $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$ 3) $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$ 4) $A\underline{x}=\underline{x}$ 5) $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

(6) מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$ ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

א. ידוע ש- A מטריצה ריבועית. מי מבין הבאים נכון :

1. AA^T סימטרית. 2. $A + A^T$ סימטרית. 3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

ב. ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר. מי מבין הבאים נכון :

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. $A^2 - B^2$ סימטרית. 3. $A^2 + B$ סימטרית.

ג. ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$. מי מבין הבאים נכון :

1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A-B)^2$ סימטרית.

ד. ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$. הוכח :

1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

ה. נתון : A, B, AB סימטריות מאותו סדר. הוכח כי $A^4B^4 = B^4A^4$.

(7) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(8) א. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה <u>הפיכה</u> : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$.

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה <u>איננה הפיכה</u> : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(9) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה :

1)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \\ 5x - 3y + 4z &= 11 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x + 4y + 2z + 4t &= 1 \\ x + 2y - z &= 0 \\ y + z + t &= 1 \\ x + 3y - z - 2t &= 0 \end{aligned}$$

(10) א. הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר n וחלץ את X :

1) $AXC = D$ 2) $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ 3) $P^{-1}X^TP = A$

4) $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ 5) $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$ 6) $ABC^TX^{-1}BA^TC = AB^T$

ב. נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. חשב את X אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1} = B + I$.

ג. נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

ד. נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. חשב את B אם נתון $5A^TB(I+2A)^{-2} = (7A)^{-2}$

(11) א. נתון : A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון : A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I) = 0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ג. נתונים : $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. חשב את $p(A)$.

2. בעזרת תוצאת סעיף 1 (ולא בדרך אחרת) הוכח ש- A והפיכה ובטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(12) נתון : A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I - A$ הפיכה ומצא את ההופכית שלה.

(13) נתון : $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$. הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה D כך ש- $D^{-1}AD = C$.

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג דימיון מטריצות ניתן לנסח את השאלה כך :
הוכח : אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A דומה ל- C (כלומר יחס הדימיון הוא יחס טרנזיטיבי).

<u>הערה</u>

בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות:

(1) 1) 4×6 2) 3) 4×2 4) 5)

6) 6×6 7) 6×2 8) 9) 6×4 10) 6×6

(2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

(3) 1) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

5) 230 6) $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ & 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

9) 63 10) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(4)

1) $\underline{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\underline{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

(5) 1) $\begin{aligned} 4x-2y+4z&=1 \\ x-y+z&=2 \\ x-6y+3z&==3 \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} -2y+4z&=1 \\ x-5y+z&=2 \\ x-6y-z&=3 \end{aligned}$ 3) $\begin{aligned} (4+k)x-2y+4z&=1 \\ x+(k-1)y+z&=2 \\ x-6y+(3+k)z&=3 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 3x-2y+4z&=0 \\ x-2y+z&=0 \\ x-6y+2z&=0 \end{aligned}$ 5) $\begin{aligned} 2x+y+z&=3 \\ -2x-3y-6z&=6 \\ 4x+y+z&=9 \end{aligned}$

(6) א. 1,2,3 ב. 2 ג. 1,2,3

(7)

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(8) 1) $k \neq 1,\ k \neq -2$. 2) $k = 1,\ k = -4$

(9) 1) $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. 2) $(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2)$

(10) א. 1. $A^{-1}DC^{-1}$. 2. D . 3. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$. 4. $CD^2 - A$.

5. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$. 6. $BA^T C (B^{-1})^T BC^T$

ב. $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ג. $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$ ד. $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

(11) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$.

ג. 1. $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 2. $B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I$.

(12) ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

פרק 13 - דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס :

(1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ (3 $\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}$

(4 $\begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (5 $\begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}$ (6 $\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(5) נתון : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$. חשב :

(1 $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$ (2 $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$ (3 $\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6) א. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

ב. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה :

(1 $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\neq 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$

(2 $a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1, j=n\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

(3 $a_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

(4 $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & \text{אחרת}\end{cases}$

(5 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix}$

(6 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 6\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 3(n-1)\end{pmatrix}$

(*7 $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i=j+1\\ c & j=i+1\end{cases}$

* בסעיף 7) : א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3,b=1,c=2$ ומצא:
1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y\end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3 , $|A|=4, |B|=2$. חשב:

(1 $|ABA^{-1}B^T|$ (2 $|4A^2B^3|$ (3 $|-A^{-2}B^TA^3|$ (4 $|-2A^2A^T adjB|$

(10) א. נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4 , $2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3 , $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$ 2. $|adj(A_{nxn})|=|A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A|=0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$. מצא את n.

ז. נתונים: $\det(A_{nxn})=2, \det(B_{nxn})=\frac{1}{3}$. חשב: $\det\left(\dfrac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

1) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+z=3 \\ 4x+y+8z=21 \\ 2x+3z=8 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2z+5t=8 \\ -2x-6y=-8 \\ 5x+3y-7z+4t=5 \\ 2x+5y+44z=51 \end{cases}$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x=y=z=t=r$

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1}.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(14) נתון:

$$A=\begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

חשב: 1) $(adjA)_{1,5}$ 2) $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש-A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש-A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש-A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון: A,B הפיכות. C,D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: 1) $C+D$ 2) $A+B$ 3) AD 4) CD 5) AB ?

(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה:
1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$ 2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$.
ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.
ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(1,1,-1)$, $(-1,3,1)$, $(3,3,-2)$.
ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.
הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות:

(1) 1) $ad-bc$. 2) 29. 3) -1. 4) -1. 5) -3. 6) -14. 7) 24. 8) 234. 9) -300. 10) 9. 11) 6. **(2)** 1) 0. 2) 0. 3) 3. 4) 24. 5) 44. 6) 104. **(3)** 1) 120. 2) 114. 3) 6.
(5) 1) -8. 2) 16. 3) 9. **(7)** 1) $n!$. 2) $(-1)^{n-1}n!$. 3) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$.
4) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$. 5) 1. 6) $2\cdot 3^{n-2}$.
7) א. $D_2=a^2-bc, D_3=a^3-2abc$, $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$.
ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$. 2. $D_{20}=2^{21}-1$. **(8)** 0. **(9)** 1) 4. 2) 2^{13}. 3) -8. 4) -2^{11}.
(10) ב. 81/32. ג. $|A|=18, |B|=-2/3$. ו. 7. ז. 4^n. **(11)** 1) $x=1,\ y=2$.
2) $x=1,\ y=1,\ z=2$. 3) $x=y=z=t=1$. **(12)** א. $k\neq 1,\ k\neq -4$. ב. $k=-2$.
ג. לא.

(13) 1) $adj(A)=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ 2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(14) 1) 240. 2) 0.5. **(15)** 1) לא. 2) לא. 3) לא. 4) לא. 5) כן. **(16)** $k=0$.
(17) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x-y+4z+2=0$. ד. 2.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

פרק 14 - פונקציות הומוגניות, משפט אוילר

שאלה 1

א. הוכח כי פונקציית התועלת $u(x,y)=\left(\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית. הנח כי m קבוע חיובי.

ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a,a)=u_y(1,1)$.

ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2,2)+u_y(1,1)=1$.

שאלה 2

תהי $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m המקיימת $f(6,3)=243$ ו- $f(2,1)=\sqrt{27}$.

א. מצא את סדר ההומוגניות, m .

ב. בנקודה $(6,3)$ עוברת עש"ע של f . מעבירים משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל. המשיק הוא $2x+3y=21$. מצא את $f_x(1,0.5)$, $f_y(2,1)$, $f_x(2,1)$.

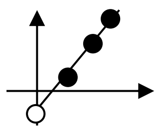
שאלה 3

תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.

על הפונקציה g ידוע כי $g(4)=5$, $g(1)=3$, $g'(8)=2$.

המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x,y) כך: $t=\frac{4y}{x}$.

מגדירים תועלת u כפונקציה של המשתנים (x,y) באופן הבא: $u(x,y)=g(t)=g\left(\frac{4y}{x}\right)$.



א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1.
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכח כי הקרן $4y-x=0$ היא עקומת אדישות של התועלת.
צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.

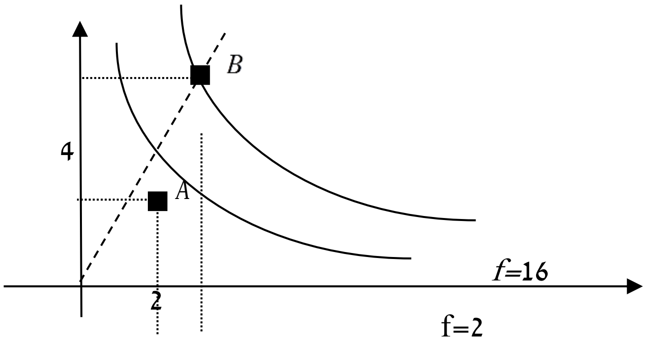
ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכח כי $u_x(1,2)=-16$.

<u>שאלה 4</u>

הפונקציה $f(x,y)$ הומוגנית מסדר **3** .

הנתונים בשרטוט.



א. מצא את שיעורי הנקודה B .

ב. מצא את ערך הסכום $f_x(4,8)+2f_y(4,8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x,y)$ על ידי $u(x,y)=\left(f(x,y)\right)^2$

ג.1. לפי כללי הגזירה מתקיים $u_x(x,y)=2\cdot f(x,y)\cdot f_x(x,y)$. הסבר זאת בקצרה.

ג.2. הוכח כי $x\cdot u_x(x,y)+y\cdot u_y(x,y)=6\left(f(x,y)\right)^2$. היעזר ב- 1 ובנתונים על f .

פרק 15 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים

עקומות שוות ערך

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

1) $f(x,y)=\frac{y}{x}$ 2) $f(x,y)=\ln x+\ln y$

3) $f(x,y)=x^2+y^2$ 4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

5) $f(x,y)=\ln(x^2-y)$ 6) $f(x,y)=x\sqrt{y}$

(2)

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f(x,y)=100-5x-2y$, $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$.

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f.

נגדיר $f(x,y)=\begin{cases}3x+y & y>x\\ 4x & y\le x\end{cases}$. הנח כי $x,y\ge 0$.

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x,y)=4,12$ עבור הפונקציה הנתונה.

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f(x,y)=\min\left\{\frac{x}{3},y\right\}$, $f:\mathbf{R}_+^2\to\mathbf{R}_+$.

(3)

תהי $u(x,y)=(x+p)(y+q)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ פונקצית תועלת של פרט.

הנקודות $(0,14)$, $(3,2)$, $(1,6)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.

מצא את p ו- q. הצב אותם בפונקצית התועלת.

מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות? עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

נגזרות חלקיות

4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות :

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ $\left(\text{only } f_x\right)$

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות :

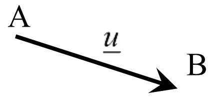
1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y,z)=xyz$

פרק 16 – ווקטורים:

ווקטורים גיאומטריים:



הגדרה כללית:

להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי:

ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$).

מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

קשרים בין ווקטורים:

1. ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.

   דוגמא לווקטורים מקבילים:

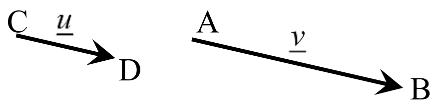
   מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

2. ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.
   - ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.
   - ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית".

   דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:

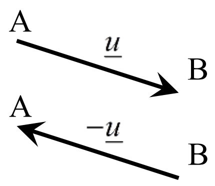
   עבור $\alpha > 1$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$,

   או: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$.



3. אם זוג ווקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w}$ מקבילים

   אז מתקיים: $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$.



ווקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל **גודל** זהה לווקטור $\overrightarrow{AB}$

וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$.

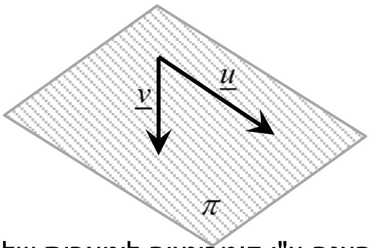
ווקטורים הפורשים מישור:

כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים

את המישור π.



קומבינציה לינארית של ווקטורים:

1. כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
2. כל ווקטור שהוא שקומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
3. אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה לינארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים **תלויים ליניארית** (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל

למישור π באופן הבא: $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$ כאשר: α, β מספרים ממשיים כלשהם.

במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

המכפלה הסקלרית וגודל של ווקטור:

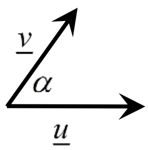
מכפלה סקלרית של שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha$$

כאשר: α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.

ניתן למצוא את הזווית שבין שני ווקטורים ע"י: $\cos\alpha = \dfrac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$.

גודל של ווקטור נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2 = \underline{u}^2$.



***הערה:**

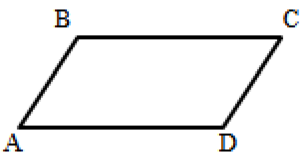
המכפלה הסקלרית $\underline{v} \cdot \underline{u}$ בין שני ווקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

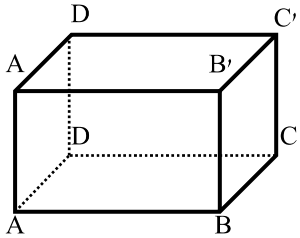
<u>שאלות:</u>

1) במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$

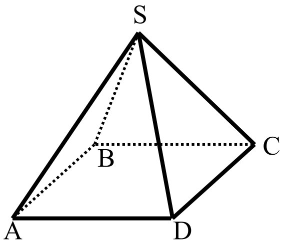
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים

ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



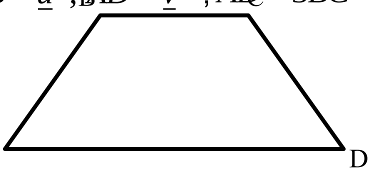


(2 בתיבה ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{AD}=\underline{v}\ ,\ \overrightarrow{AA'}=\underline{w}$
מצא את כל הווקטורים בתיבה
ששווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.

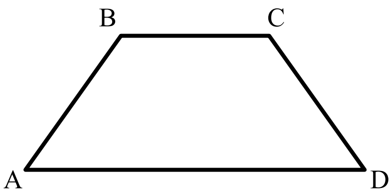


(3 בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{AD}=\underline{v}\ ,\ \overrightarrow{AS}=\underline{w}$
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה
השווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.

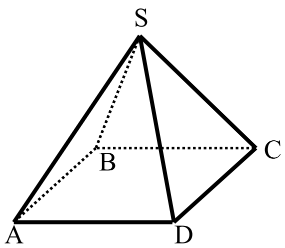
(4 בטרפז $ABCD$ שבשרטוט
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{AD}=\underline{v}\ ,\ AD=3BC$.
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן
להביעם באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



(5 בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{AD}=\underline{v}\ ,\ AD=3BC$.



א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.
ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{BE}$.
ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.



(6 בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{AD}=\underline{v}\ ,\ \overrightarrow{AS}=\underline{w}$.
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את
הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.
ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{BN}$.

(7 הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=2:3$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

(8 הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=3:5$. נתון: $\overrightarrow{AP}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

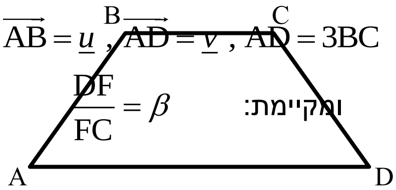
(9 הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

(10 הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

(11 בטרפז ABCD שבשרטוט

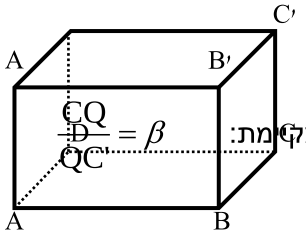


נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $AD=3BC$.

הנקודה F נמצאת על הצלע CD ומקיימת: $\frac{DF}{FC}=\beta$.

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.

(12 בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

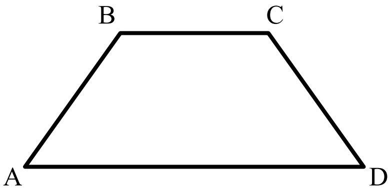


הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$.

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור: $\overrightarrow{PQ}$.

(13 בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

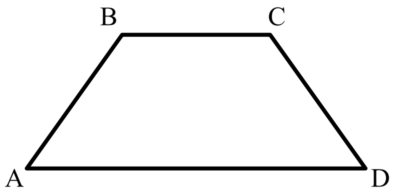


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$.

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AB}$.

14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

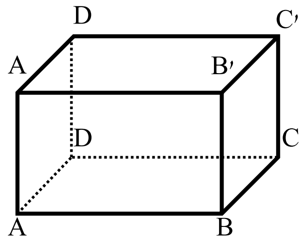


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$.

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AC}$.

15) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

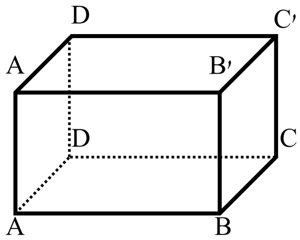
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שבעבורם $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה ABB'A'.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{EC}$.

16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

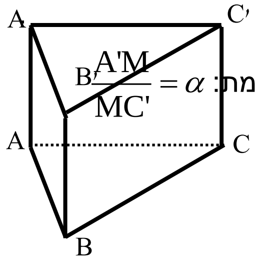
והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס ABCD?

17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C'



ובה נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$

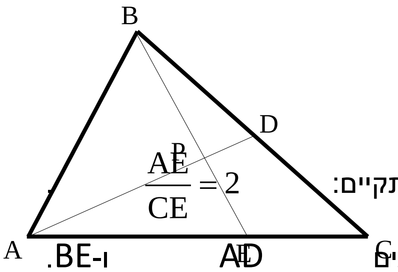
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'} = \alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC} = \beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ABB'A'. הבע את α באמצעות β .



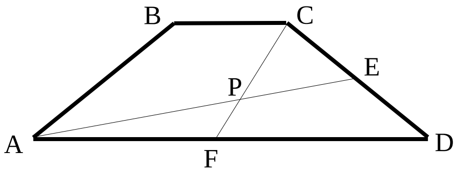
18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE}=2$.

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נגדיר: $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, וכן: $\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP}=s\cdot\overrightarrow{BE}$.

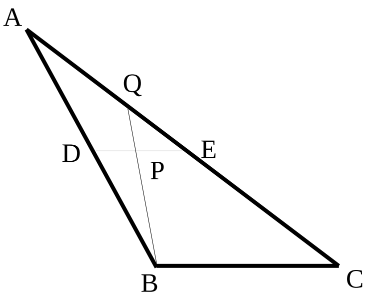
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, t ו- s את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.



19) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD.הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו-CF. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.



20) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overrightarrow{DE}\parallel\overrightarrow{BC}$.

הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP חותך את הצלע AC בנקודה Q.

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle DPB}}$.

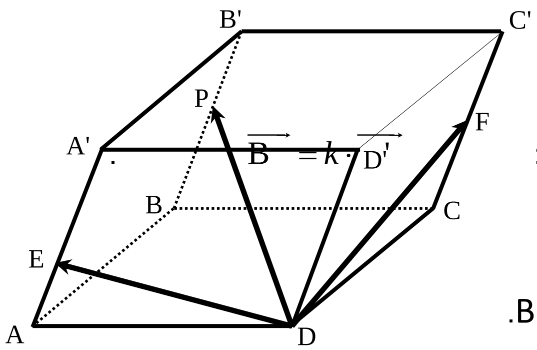
21) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{DD'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{DC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{DA}=\underline{u}$.

הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC',

הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'

ומקיימת: $A'E=2AE$ והנקודה P נמצאת על המקצוע BB' ומקיימת: $\overrightarrow{B\ }=k\cdot\overrightarrow{D'}$.

נתון: $\overrightarrow{DP}=t\cdot\overrightarrow{DE}+s\cdot\overrightarrow{DF}$.



א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- k את הווקטור $\overrightarrow{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB'.

ג. האם הנקודות D , E, F ו-P נמצאות על אותו מישור? נמק.

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

א. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=2$, $\alpha=60^o$ ב. $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$, $\alpha=120^o$

ג. $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=6$, $\alpha=30^o$ ד. $|\underline{u}|=8$, $|\underline{v}|=3$, $\alpha=180^o$

ה. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=5$, $\alpha=0^o$ ו. $|\underline{u}|=7$, $|\underline{v}|=4$, $\alpha=90^o$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

א. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=4$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=6$ ב. $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=2$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=-4\sqrt{3}$

ג. $|\underline{u}|=9$, $|\underline{v}|=5$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$ ד. $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=6$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=12$

24) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{v}|=3$, $|\underline{u}|=6$. הזווית ביניהם היא 120^o.

חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

25) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{v}|=5$, $|\underline{u}|=4$.

חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN}=0.5\underline{u}-\underline{v}$.

26) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{v}|=3$, $|\underline{u}|=6$. הזווית ביניהם היא 120^o.

חשב את גודל הזווית $\angle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM}=4\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

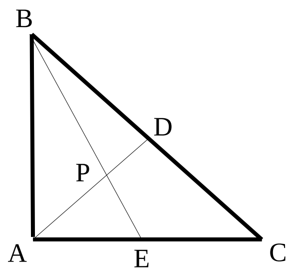
27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle BAC=90^o$).

הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נתון: $\frac{AP}{PD}=3$, $AB=8$, $AC=12$.

חשב את גודל הזווית $\angle DPC$.

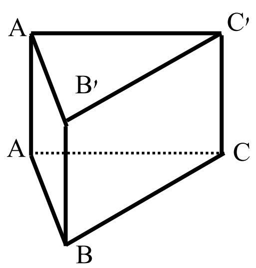


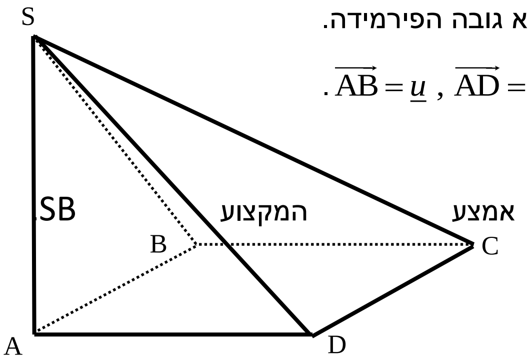
28) נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.

הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN=2CN$.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

חשב את גודל הזווית: $\angle MAN$.





(29 בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.

נתון: $AB = AD = \frac{1}{2}AS = k$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.

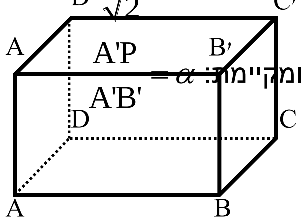
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC

והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.

חשב את גודל הזווית: $\angle PAQ$.

(30 בתיבה ABCDA'B'C'D'

נתון: $\overrightarrow{A} = \underline{u}$, $\underline{B}$, $AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AD = AA'$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

א. מהו ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \frac{5}{6}\left|\overrightarrow{AQ}\right|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos\angle PAQ$ והראה כי לכל ערך של α הזווית $\angle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שבעבורו הזווית $\angle PAQ$ מקיימת: $\cos\angle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}$?

(31 הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

(32 נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.

(33 נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD. הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

(34 נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD. הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}$.

(35 נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS} \perp \overrightarrow{AC}$.

הוכח: $\overrightarrow{CS} \perp \overrightarrow{AB}$.

(36 הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

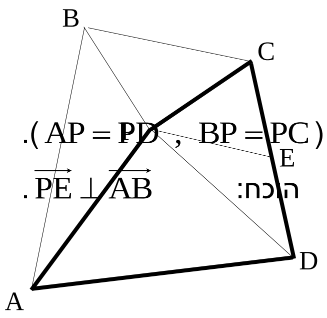
37) א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC. הוכח: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC.

הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC. הוכח: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\right)$.

ג. נתון בנוסף כי $\overrightarrow{AS}$ ו- $\overrightarrow{AP}$ מאונכים ל- $\overrightarrow{BC}$.

הוכח כי $AB=AC$. (הדרכה: סמן $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$).



38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD

כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים

ישרי זווית וש"ש ($AP=PD$, $BP=PC$).

הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{AB}$.

(הדרכה: סמן $\overrightarrow{PB}=\underline{a}$, $\overrightarrow{PC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{PA}=\underline{c}$, $\overrightarrow{PD}=\underline{d}$).

39) בטטראדר SABC נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AS}$.

הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\overrightarrow{SQ}=\beta\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$. הוכח: $AB=AC$.

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן.
הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים,
אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

(1 $\underline{u}=\overrightarrow{DC}$, $\underline{v}=\overrightarrow{BC}$. (2 $\underline{u}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$, $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{B'C'}$,

$\underline{w}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$. (3 $\underline{u}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\underline{w}=\overrightarrow{AS}$.

(4 $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\underline{v}$. (5 א. $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$, $\overrightarrow{DC}=\underline{u}-\frac{2}{3}\underline{v}$. ב. $\overrightarrow{BE}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$.

ג. $\overrightarrow{AF}=\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}$. (6 א. $\overrightarrow{AC}=\underline{v}+\underline{u}$, $\overrightarrow{SC}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$. ב. $\overrightarrow{BN}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

(7 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\underline{u}$, $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\underline{u}$. (8 $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{3}\underline{u}$, $\overrightarrow{PB}=\frac{5}{3}\underline{u}$. (9 $\overrightarrow{AP}=\alpha\underline{u}$, $\overrightarrow{PB}=(1-\alpha)\underline{u}$.

(10 $\overrightarrow{AP}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}$, $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$. (11 $\overrightarrow{AF}=\frac{\beta}{1+\beta}\underline{u}+\frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v}$.

(12 $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}+\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$. (13 $\alpha=2$. (14 $\alpha=1$.

(15 א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$. ב. לא. ג. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$.

(16 א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$. ב. $\alpha=1$. ג. לא.

(17 א. $\overrightarrow{NM}=(\beta-1)\underline{u}+(\frac{\alpha}{\alpha+1}-\beta)\underline{v}+\underline{w}$. ב. $\beta=1$. ג. $\alpha=\frac{\beta}{1-\beta}$.

(18 א. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v}$, $\overrightarrow{AP}=(1-s)\underline{u}+\frac{2}{3}s\underline{v}$. ב. $AP:PD=4:1$.

(19 $CF:PF=2:1$. (20 א. $AQ:QC=1:2$. ב. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}}=\frac{1}{3}$.

(21 א. $\overrightarrow{DP}=\underline{u}+\underline{v}+(1-k)\underline{w}$. ב. $B'P:PB=1:5$. ג. כן.

(22 א. 3. ב. -10. ג. $6\sqrt{3}$. ד. -24. ה. 15. ו. 0.

(23 א. 60°. ב. 150°. ג. 90°. ד. 0°. (24 $\overrightarrow{PQ}=18.248$. (25 $\overrightarrow{MN}=\sqrt{29}$.

(26 31.87°. (27 55.49°. (28 70.623°. (29 24.095°.

(30 א. $\alpha=\frac{3}{4}$. ב. $\cos(PAQ)=\frac{\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}\sqrt{1+\alpha^2}}$. ג. $\alpha=\frac{1}{2}$. (39 א. $\alpha+2\beta=1$.

פרק 17 - כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים

* בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

(1) נתון $z=\ln(x^2-y^2)$, $x=2u-v,\ y=u^2+v^3$. חשב $z_u\,,\ z_v$.

(2) נתון $z=e^{u-v}$, $u=t^2+4m$, $v=4t+k^2$. חשב $\frac{\partial z}{\partial t}\,,\ \frac{\partial z}{\partial m}\,,\ \frac{\partial z}{\partial k}$.

(3) נתון $z=f(x^2-y^2)$. הוכח $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

(4) נתון $z=f(xy)$. הוכח $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

(5) נתון $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$. הוכח $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

(6) נתון $z=f(x-y,y-x)$. הוכח $z_x+z_y=0$.

(7) נתון $w=f(x-y,y-z,z-x)$. הוכח $w_x+w_y+w_z=0$.

(8) נתון $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$. הוכח $u_x\cos y+u_y\cos x=\cos x\cos y$.

(9) נתון $z=y\cdot f(x^2-y^2)$. הוכח $\frac{1}{x}z_x+\frac{1}{y}z_y=\frac{z}{y^2}$.

(10) נתון $z=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$. הוכח $x\cdot z_x+y\cdot z_y=xy+z$.

(11) נתון $u(x,y,z)=x^2\cdot f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$. הוכח $xu_x+yu_y+zu_z=2u$.

(12) נתון $h(x,y)=f(y+ax)+g(y-ax)$. הוכח $h_{xx}=a^2\cdot h_{yy}$.

(13) נתון $u(x,y)=f(e^x\sin y)-g(e^x\sin y)$.

הוכח: א. $u_{xx}+u_{yy}=\frac{u_{xx}-u_x}{\sin^2 y}$. ב. $u_{xy}=u_{yx}$.

חשב: ג. $u_{xy}(1,\pi)$ אם ידוע ש- $f'(0)=2,\ \ g'(0)=1$.

(14) נתון $u=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

א. הוכח $(u_x)^2+(u_y)^2=(u_r)^2+\frac{1}{r^2}(u_\theta)^2$.

ב. הוכח $u_{rr}=f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta$.

ג. הוכח $f_{xx}+f_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{1}{r}u_r$.

(15) נתון $z=h(u,v)$ ונתון כי $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ מקיימות את מישוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$.

הוכח כי:

א. u,v מקיימות את משוואת לפלס. כלומר $u_{xx}+u_{yy}=0$, $v_{xx}+v_{yy}=0$.

ב. $h_{xx}+h_{yy}=\left((u_x)^2+(v_x)^2\right)(h_{uu}+h_{vv})$.

(16) נתון $u=f(x,y)$, $x=r\cosh s$, $y=r\sinh s$.

הוכח כי $(u_x)^2-(u_y)^2=(u_r)^2-\frac{1}{r^2}(u_s)^2$.

פתרונות

(13) ג. $-e$.

פרק 18 - נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל השלם

נוסחת טיילור

פתח את הפונקציות הבאות לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה $\left(a,b\right)$:

(1) $f(x,y)=x^2y+3y-2$ $\left(a,b\right)=(1,2)$

(2) $f(x,y)=(1+y)\ln(1+x-y)$ $\left(a,b\right)=(0,0)$

(3) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$ $\left(a,b\right)=(0,0)$

(4) $f(x,y)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-y}{x+y^2}}$ $\left(a,b\right)=(2,1)$

(5) בעזרת התוצאה של תרגיל 2 , חשב בקירוב את $\ln(1.5)$.

(6) בעזרת התוצאה של תרגיל 3 , חשב בקירוב את e^3 .

(7) בעזרת התוצאה של תרגיל 4 , חשב בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

הדיפרנציאל השלם

(8) מחשבים את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו.
ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%,
ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4% .
הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

(9) נתונות שתי צלעות במלבן : $a=10_{cm}\,,\,b=24_{cm}$.
חשב את השינוי המדוייק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך
אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב- 4_{mm} ואת הצלע b יקצרו ב- 1_{mm} .

(10) מודדים את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל
מדידה אינה עולה על 5% . הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית
באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

(11) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצא בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09+(0.99)^2}$.

פתרונות

(1) $f(x,y)=6+4(x-1)+4(y-2)+2(x-1)^2+2(x-1)(y-2)$

(2) $f(x,y)=x-y-\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2$

(3) $f(x,y)=1+4y-x^2+14y^2$

(4) $f(x,y)=1+\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{3}(y-1)-\frac{7}{81}(x-2)^2+\frac{1}{9}(x-2)(y-1)$

(5) $3/8$

(6) 19

(7) $101/81$

(8) 8%

(9) שינוי מדויק 0.06472 , שינוי מקורב 0.06153.

(10) 5%.

(11) $2\,7/3200$

פרק 19 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

* מומלץ בחום לעיין בנספח הוקטורים שבעמוד 71.

(1) תהי $f(x,y)=x^2+y^2$.

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3,4)$. מהי משמעות התוצאה ?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f העובר דרך $(3,4)$.

(2) תהי $f(x,y)=3x^2y$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

(3) תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,\pi/2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

(4) תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$ בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר x .

(5) תהי $f(x,y)=xy^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$.

(6) תהי $f(x,y)=x^2y^2z$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2,1,4)$ בכיוון הוקטור

$\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$.

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x,y) נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, מצא את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון הנקודה $(2,6)$.

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$ בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$ בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$ ואתה נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר , באיזה כיוון עליך ללכת?

הערות סימון

א. במישור R^2 : $\mathbf{i}=(1,0)$, $\mathbf{j}=(0,1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים : $\vec{u}=(x,y)$ או $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$

למשל, $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j} \iff \vec{u}=(3,4)$

במרחב R^3 : $\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{k}=(0,0,1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים : $\vec{v}=(x,y,z)$ או $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

למשל, $\vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k} \iff \vec{u}=(3,4,5)$

ב. יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם כך $\underline{u}$ או כך $\mathbf{u}$.

ג. וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

<u>פתרונות</u>

(1) א. הגרדיאנט (6,8) . אורך הגרדיאנט 10 .

(2) 48/5 (3) ½ (4) $7.5\sqrt{2}$ (5) $3\sqrt{13}$ (6) 88/3

(7) $1/5\sqrt{5}$ (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור (1,1) ושווה ל- $\sqrt{2}$

(9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור (12,14,-12) ושווה ל- 22 .

(10) בכיוון הוקטור (-2,2,-2) .